Αλγεβρα Β Λυκείου

1. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο : $P(x)=\alpha^2\chi^4+2\alpha\chi^3+(\alpha-1)\chi+2$ δεν έχει ρίζα το -1 για κάθε $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}$.

2. Να βρείτε πολυώνυμο $\mathbf{P(x)}$ 2^ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς 0,-2 και να ισχύει $\mathbf{P(\ \ 1)=3}$

3. Έστω το πολυώνυμο: $P(x)=(\lambda^2-1)\chi^3+(\lambda^3-\lambda)\chi+\lambda-1.$
Να βρείτε το λ ώστε το $\mathbf{P(x)}$

α. να έχει ρίζα τον αριθμό -1.

β. να είναι μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $2x^4-x^3-16x+8=0$

ii $x^3-3x^2-6x+8=0$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $-x^3+3x+2<0$ ii. $4x^4-8x^3+5x^2-x\geq 0$

6. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα χ’χ.

i. $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ ii. $f(x)=3x^5-4x^4-20x^3+10x^2+17x-6$

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g αν:

i. $f(x)=2x^4+5x \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{g(x)}=5\mathrm{x}^3+2$

ii. $f(x)=2x^3+7x^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{g(x)}=\mathrm{x}^4+8x+12$

8. Να βρείτε το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^2+2\lambda\mathrm{x}\text{-}\lambda+2$ με το $x+3\lambda$ να είναι $7-3\lambda.$

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-ax^2+12x+\beta$, το οποίο έχει παράγοντα το x – 2 και όταν διαιρεθεί με το x – 1 αφήνει υπόλοιπο 1.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των α και β
(Μονάδες 8)

Β2. Για α = 9 και β = -4

i) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0
(Μονάδες 8)

Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<x-2$

10. Έστω D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες ενός 2x2 γραμμικού συστήματος (Σ), με $D=-(-1)^{2014}$ και $(D_x-2)^2+D_y{}^2=0$.

Β1. Να δείξετε ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση την $(x_0, y_0) = (-2, 0)$.

11. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}(\kappa+1)\,x-2\psi=\kappa+1\\ \kappa x-\kappa\psi=1\end{cases}$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Να βρείτε για ποιες τιμές του κ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, ψ_0), την οποία και να βρείτε.

12. Δίνεται το πολυώνυμο 3ου βαθμού

P(x) = (3συνω+2) x^4 +5x^3 -2x^2+7x+2004, $x\in\Re$ και $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$

α) Να αποδείξετε ότι ημω=$\frac{\sqrt{5}}{3}$ και εφω= $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

β) Αν Α=$-\frac{1}{2}+\eta\mu(\pi-\omega)\cdot\varepsilon\phi(-\omega)+\varepsilon\phi(\frac{\pi}{2}-\omega)\cdot\eta\mu(3\pi+\omega)$, να αποδείξετε ότι

Α=$\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}$

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x-A)

13.

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι
μεγαλύτερος από το Βασίλη.
α). Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε
την ηλικία του καθενός.

ΛΥΣΗ

Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασίλη. Από τα δεδομένα, προκύπτει ότι :

$x + y = 27$ (1) και $x > y$ (2).

α). Υποθέτουμε ότι οι x, y είναι θετικοί ρητοί αριθμοί.

Από τα παραπάνω, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του καθενός, διότι η (1) αποτελεί μία γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους, ενώ η (2) δεν αποτελεί ικανό δεσμό σε συνδιασμό με την (1). Για παράδειγμα, θα μπορούσε (x, y) = (18, 9) ή (x, y) = (17, 10) όπως και άλλοι συνδιασμοί.

β) ……………………….

14.

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : R \to R$ διέρχεται από τα σημεία
Α(5, 2) και Β(4, 9).
α). Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)
β). Να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3\cdot x) < 2$.
(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α). $f(5) = 2$, $f(4) = 9$. $4 < 5$ και $f(4) > f(5)$…………………

15.

Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} (\lambda+1)\cdot x + 2\cdot y = 3 \\ 4\cdot x + (\lambda-1)\cdot y = -6 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α). Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.
(Μονάδες 8)
β). Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
(Μονάδες 8)
γ). Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

16.

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \dfrac{2 \cdot x}{x^2+1}$, με $x \in R$.
α). Να δείξετε ότι η $f(x) \leq 1$.
β). Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ). Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

.

17.

Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς :

$συν\dfrac{\pi}{6}$, $συν\dfrac{\pi}{4}$, $συν\dfrac{17\pi}{10}$

.

ΛΥΣΗ

Κάνω αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο για το $συν\left(\dfrac{17\cdot\pi}{10}\right)$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά γωνίες που διαφέρουν κατά π
Και στην συνέχεια γωνίες που έχον άθροισμα π παίρνουμε :

$συν\left(\dfrac{17\cdot\pi}{10}\right) = συν\left(\pi + \dfrac{7\cdot\pi}{10}\right) = -συν\left(\dfrac{7\cdot\pi}{10}\right) = συν\left(\dfrac{3\cdot\pi}{10}\right)$ (Αφού $\dfrac{7\cdot\pi}{10} + \dfrac{3\cdot\pi}{10} = \pi$) …………………

18.

Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι $-$ συν(2·ω) + 5·ημω $-$ 2 = 0.
α). Να αποδείξετε ότι ισχύει : $2\cdot ημ^2ω + 5\cdot ημω - 3 = 0$.

β). Να αποδέιξετε ότι ημω= $\dfrac{1}{2}$

19.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5$, $x \in R$.
α). Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$.
β). Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ). Με ποια μετατόπιση της $g(x) = x^2$, προκύπτει η C_f ;

ΛΥΣΗ
α). Για κάθε $x \in R$, ισχύει : $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 5 \geq -5 \Rightarrow f(x) \geq -5$.
Όμως $f(0) = -5$. Επομένως $f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in R$. Άρα………………..

20.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^2 - d$, $x \in R$ με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία Α(0, 16) και Β(4, 0).
α). Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d
και να υπολογίσετε την τιμή τους.
(Μονάδες 10)
β). Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,
i). να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 3)
ii). να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη
γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική
παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$.
(Μονάδες 6)
iii). με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα
διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα
από αυτά τα διαστήματα.
(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ
α). Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2 - d$, $x \in R$ διέρχεται από τα σημεία Α(0, 16) και Β(4, 0), επομένως οι συντεταγμένες των σημείων θα επαληθεύουν την εξίσωσή της .
Δηλαδή $f(0) = 16$ και $f(4) = 0$.
……………………………….