ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΝΝΟΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

[Ενότητα Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης του κεφ.1.2 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Στο επίκεντρο της ανάλυσης προφανώς βρίσκεται η έννοια της συνάρτησης. Η συνάρτηση μας δίνει τη δυνατότητα να περιγράψουμε τη "**σχέση**" ή καλύτερα την "**εξάρτηση**" μεγεθών μεταξύ τους καθώς επίσης και να εκφράσουμε με μαθηματικό τρόπο διάφορες πραγματικές καταστάσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{R}\left(A\subseteq\mathbf{R}\text{ με }A\neq\emptyset\right)$.

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το Α, κάθε νόμο (τρόπο ή διαδικασία) f με τον οποίο κάθε στοιχείο x του Α $\left(x\in A\right)$ αντιστοιχίζεται (συσχετίζεται) με ένα μόνο στοιχείο y του $\mathbf{R}\left(y\in\mathbf{R}\right)$.

Συμβολικά ο κανόνας αυτός γράφεται:

$f:A\to\mathbf{R}$ ή $x\to y\in\mathbf{R}$ ή $y=f\left(x\right)$

και εννοούμε ότι από το Α το στοιχείο x αντιστοιχίζεται μέσω της f στο $y\in\mathbf{R}$ ή **ότι η τιμή της f στο x είναι y**.

Σημαντικές παρατηρήσεις

i. Το γράμμα x παριστάνει το τυχαίο (το οποιοδήποτε) στοιχείο του Α και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή. Το γράμμα y παριστάνει, όπως είπαμε και πιο πάνω, την τιμή της f στο x και λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

ii. Το $f\left(x\right)$ ονομάζεται τύπος της συνάρτησης και η $y=f\left(x\right)$ ονομάζεται εξίσωση της συνάρτησης.

iii. Ονομάζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης f το σύνολο των $x\in\mathbf{R}$ για τα οποία η τιμή της f στο x είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή $A=D_f=\left\{x\in\mathbf{R}:y=f\left(x\right)\in\mathbf{R}\right\}$

iv. Ονομάζουμε <u>σύνολο τιμών</u> της συνάρτησης f το υποσύνολο $f(A)$ του $\mathbf{R}$ όπου για το κάθε $y \in f(A)$ και μόνο για αυτά υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ με $y = f(x)$, δηλαδή $f(A) = \{y \in \mathbf{R}:$ υπάρχει $x \in A$ με $y = f(x)\}$

v. Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x,y) όπου x = πρότυπο και y = εικόνα του x μέσω της f ονομάζεται <u>γραφική παράσταση της f</u> και τη συμβολίζουμε με C_f .Τα x ονομάζονται <u>τετμημένες</u> των σημείων της C_f και τα y <u>τεταγμένες</u>.

<u>Προσοχή</u>**:** Ασχολούμεθα μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**

<u>Προσοχή</u>**:** Για να οριστεί μια συνάρτηση αρκεί να γνωρίζουμε:

α) Το πεδίο ορισμού της.

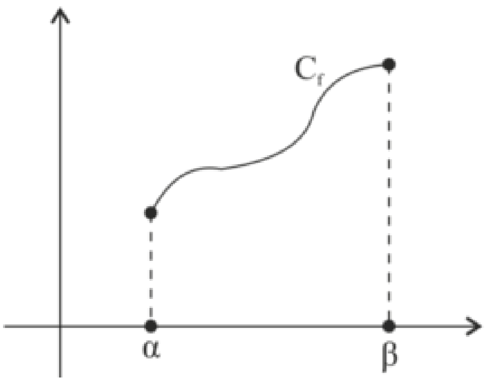
β) Τον τύπο της.

<u>Ειδικότερα</u>:

Όταν δίνεται μόνο ο τύπος $f(x)$ μιας συνάρτησης f ,τότε ως πεδίο ορισμού της θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

<u>Εύρεση πεδίου ορισμού</u>

1. Αν γνωρίζουμε την C_f της f, τότε το πεδίο ορισμού της f είναι η ορθή προβολή της C_f πάνω στον xx', δηλαδή είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f.



$D_f = [\alpha, \beta]$

2. Αν για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε τον τύπο της $y = f(x)$, τότε το πεδίο ορισμού της είναι όπως ήδη αναφέρθηκε το:
$A = D_f = \{x \in \mathbf{R} : f(x) \in \mathbf{R}\}$

Ειδικότερα:

Για να εξασφαλιστεί ότι το $f(x) \in \mathbf{R}$ πρέπει να γνωρίζουμε τα παρακάτω:

i. Αν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, με $\alpha_i \in R, i = 0,1,...,\nu$ και $\alpha_\nu \neq 0, \nu \in N$ (δηλαδή η $f(x)$ είναι **<u>πολυωνυμική</u>** συνάρτηση), τότε:
$A = D_f = \mathbf{R}$

ii. Αν $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (**<u>ρητή συνάρτηση</u>**, δηλαδή $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα), τότε:
$A = D_f = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}$.

iii. Αν $f(x) = \sqrt[\kappa]{g(x)}$ τότε $A = D_f = \{x \in \mathbf{R} : g(x) \geq 0\}$ με $\kappa \geq 2, \kappa \in \mathbf{N}$.

iv. Αν $f(x) = \sqrt[\kappa]{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$ τότε $A = D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : h(x) \neq 0 \text{ και } \dfrac{g(x)}{h(x)} \geq 0\right\}$ με $\kappa \geq 2, \kappa \in \mathbf{N}$.

v. Αν $f(x) = \ln[P(x)]$ τότε $A = D_f = \{x \in \mathbf{R} : P(x) > 0\}$.

vi. Αν $f(x) = \eta\mu[P(x)]$ τότε $A = D_f = \mathbf{R}$.

vii. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu[P(x)]$ τότε $A = D_f = \mathbf{R}$.

viii. Αν $f(x)=\epsilon\phi\left[P(x)\right]$ τότε $A=D_f=\left\{x\in\mathbf{R}:P\left(x\right)\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z\right\}$.

ix. Αν $f(x)=\sigma\phi\left[P(x)\right]$ τότε $A=D_f=\left\{x\in\mathbf{R}:P\left(x\right)\neq\kappa\pi,\ \kappa\in Z\right\}$.

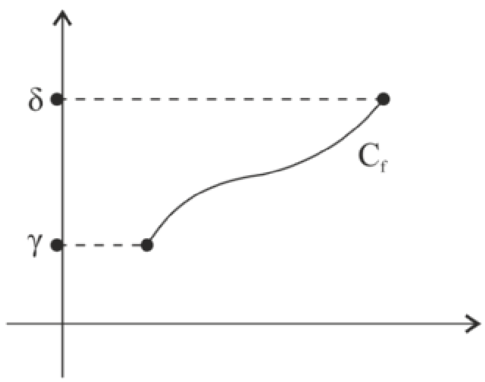
<u>Προσοχή</u>:

Η εύρεση του πεδίου ορισμού πρέπει να **<u>προηγείται οποιουδήποτε μετασχηματισμού</u>** (ομώνυμα κλάσματα, παραγοντοποιήσεις, απλοποιήσεις κ.λπ.) στη συνάρτηση.

Δηλαδή το πεδίο ορισμού το βρίσκουμε χωρίς να "πειράξουμε καθόλου" τον αρχικό τύπο της συνάρτησης.

<u>Εύρεση συνόλου τιμών</u>

Αν γνωρίζουμε την C_f της f, τότε το σύνολο τιμών της f είναι η ορθή προβολή της C_f πάνω στον yy' δηλαδή το σύνολο $f\left(A\right)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

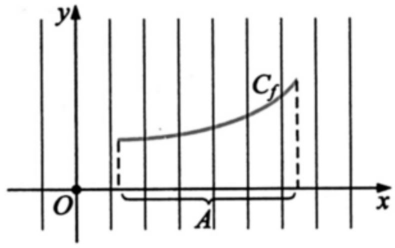
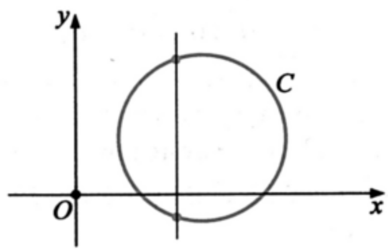


$f\left(A\right)=\left[\gamma,\delta\right]$

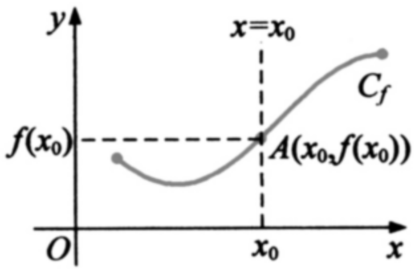
<u>Σημαντικές παρατηρήσεις</u>

1. Κάθε σημείο της C_f επαληθεύει την εξίσωση $y = f(x)$, δηλαδή:
   $M(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

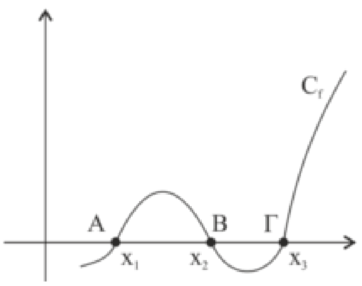
2. Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbf{R}$ σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σημεία της C_f που να έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα κάθε κατακόρυφη ευθεία θα έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την C_f ,
   π.χ.

	
είναι συνάρτηση	ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση

3. Η τιμή της f στο x_0 είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .



4. Η τετμημένη/ες του/των σημείου/ων τομής (αν υπάρχουν) της C_f με τον xx' είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

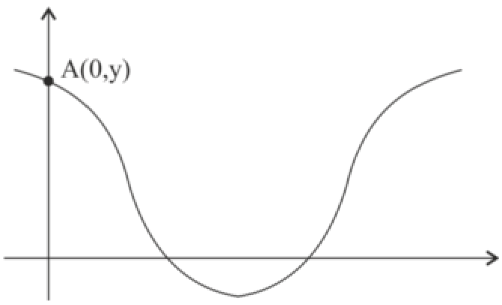


$A = (x_1, 0)$

$B = (x_2, 0)$

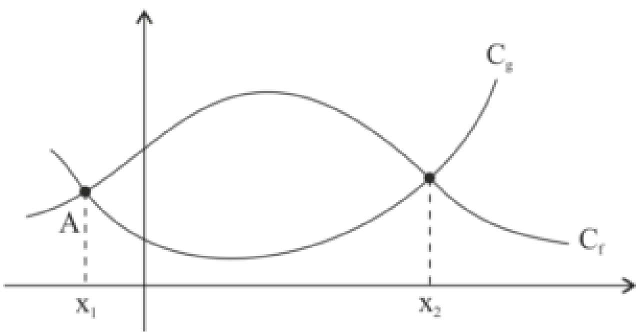
$\Gamma = (x_3, 0)$

5. Η τεταγμένη του σημείου τομής (αν υπάρχει) της C_f με τον yy' είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(0)=y$.

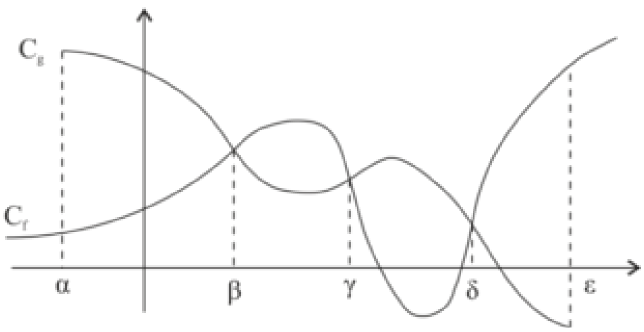


6. Η επίλυση της ανισότητας $f(x)>0$ μας καθορίζει το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα xx', ενώ η ανισότητα $f(x)<0$ μας καθορίζει το διάστημα στο οποίο η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx'.

7. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την C_g, όπου f, g δυο πραγματικές συναρτήσεις.



8. Η επίλυση των ανισοτήτων $f(x)>g(x)$ ή $g(x)>f(x)$ μας καθορίζει τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g ή η C_g πάνω από την C_f.

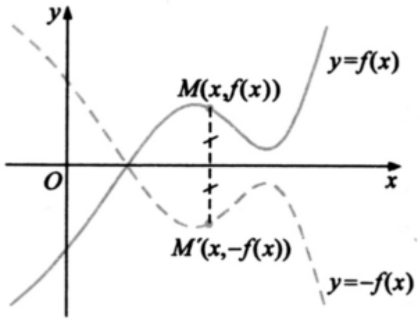


- $g>f$ στο $[\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta)$
- $f>g$ στο $(\beta,\gamma)\cup(\delta,\epsilon]$

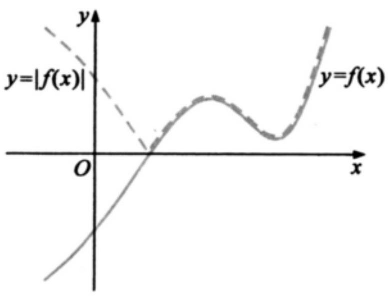
- $D_f \cap D_g = [\alpha, \epsilon]$

Έκτος αυτού του διαστήματος δεν έχει νόημα οποιαδήποτε σύγκριση.

9. Η γραφική παράσταση της $-f(x)$ είναι συμμετρική με την C_f με άξονα συμμετρίας τον xx'.



10. Για να παραστήσουμε γραφικά την $|f(x)|$ κατασκευάζουμε πρώτα την C_f και στη συνέχεια το τμήμα (ή τα τμήματα) της C_f που είναι κάτω από τον xx' το αντικαθιστούμε με το συμμετρικό του (ή τα συμμετρικά τους) ως προς τον xx'.



<u>Μην ξεχνάτε</u>: ότι για μια σχέση $f: A \to B \subseteq \mathbf{R}$ με $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ είναι συνάρτηση όταν και μόνο όταν

- Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε $x_1 \neq x_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$

Πρέπει να θυμόμαστε επίσης ότι οι ΑΡΤΙΕΣ συναρτήσεις είναι συμμετρικές με άξονα συμμετρίας τον yy' ενώ οι ΠΕΡΙΤΤΕΣ συναρτήσεις είναι συμμετρικές με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων δηλαδή το Ο(0,0).

<u>Ισότητα συναρτήσεων</u>

<u>Ορισμός</u>: Δίδονται οι συναρτήσεις

$f: A \to \mathbf{R}$ και $g: B \to \mathbf{R}$.

Θα λέμε ότι οι f και g είναι ίσες $(f = g)$ όταν:

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $(A = B)$.
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Συμβολικά: $f = g \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} D_f = D_g = A \\ \text{και} \\ f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A \end{array} \right\}$

<u>Σημαντικές παρατηρήσεις</u>

1. Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι οι ίσες συναρτήσεις f, g θα έχουν και ίδια σύνολα τιμών.

2. Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε ένα σύνολο $\Delta \subseteq D_f \cap D_g$ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε θα λέμε ότι οι f, g είναι ίσες στο Δ αλλά, χωρίς απαραίτητα να είναι και ίσες στο πεδίο ορισμού τους.

   π.χ.

   $$f(x) = |x|, D_f = \mathbf{R}$$
   $$g(x) = x, D_g = \mathbf{R}$$

   Έστω $\Delta = [0, +\infty)$.
   Παρατηρώ ότι $f(x) = |x| = x = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

   Επίσης παρατηρώ ότι έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Όμως υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x_0 \in \mathbf{R}$ με $f(x_0) \neq g(x_0)$, δηλαδή $f(-8) \neq g(-8)$.

3. Απόρροια του ορισμού είναι ότι δύο συναρτήσεις θα είναι διάφορες μεταξύ τους $(f \neq g)$, αν τουλάχιστον μία από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει. Γι' αυτό το λόγο για να ελέγξουμε κατά πόσο δύο συναρτήσεις είναι ίσες εξετάζουμε πρώτα αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ύστερα αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

4. Αν $f = g$, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις ταυτίζονται.

5. Συχνά όταν $f \neq g$ ζητείται να βρεθεί το "*<u>ευρύτερο</u>*" υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο να είναι ίσες οι συναρτήσεις. Σ' αυτή την περίπτωση προσδιορίζουμε το "ευρύτερο" υποσύνολο του $\mathbf{R}$, έστω Ε, στο οποίο ορίζονται οι f, g. Δηλαδή $E \subseteq D_f \cap D_g$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in E$. Άρα $f = g$ στο Ε.

Πράξεις με συναρτήσεις

Ορισμός:

Δίδονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και $A \cap B \neq \emptyset$.

Ορίζουμε ως

άθροισμα $f+g$,

διαφορά $f-g$,

γινόμενο $f \cdot g$ και

πηλίκο $\frac{f}{g}$

των συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΤΥΠΟΣ	ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ
Άθροισμα	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$A \cap B$
Διαφορά	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$A \cap B$
Γινόμενο	$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$	$A \cap B$
Πηλίκο	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$A \cap B-\{x \in A \cap B: g(x)=0\}$

Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Το σημείο που πρέπει να προσέξουμε είναι ο προσδιορισμός των πεδίων ορισμού και κυρίως του $A \cap B$. Στην περίπτωση που $A \cap B=\emptyset$, τότε δεν ορίζονται οι πράξεις. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να κάνουμε πράξεις με τις συναρτήσεις αν πρώτα δεν εξασφαλίσουμε ότι $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Οι $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, είναι και αυτές συναρτήσεις. Δηλαδή οι πράξεις είναι ένας τρόπος δημιουργίας νέων συναρτήσεων.

3. Σ'αυτό το σημείο πρέπει να εξηγήσουμε επίσης τις έννοιες του «γινομένου πραγματικού αριθμού κ επί τη συνάρτηση f» καθώς και τη συνάρτηση «δύναμη».
   Δηλαδή:

   $(\kappa f)(x)=\kappa \cdot f(x)$ με $D_{\kappa f}=A$ και $\kappa \in \mathbf{R}$ και
   $(f^{\nu})(x)=f^{\nu}(x)$ με $D_{f^{\nu}}=A$ και $\nu \in \mathbf{N}^*$

<u>Σύνθεση συναρτήσεων</u>

Εκτός από τους ήδη γνωστούς τρόπους δημιουργίας νέων συναρτήσεων από δοσμένες συναρτήσεις

$f: A \to \mathbf{R},\ g: B \to \mathbf{R}$

θα αναφερθούμε σε μία νέα δυνατότητα δημιουργίας συνάρτησης. Δηλαδή:

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ **(1)**

Για να έχει **νόημα** αυτή η διαδικασία θα πρέπει $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση στις εξής περιπτώσεις:

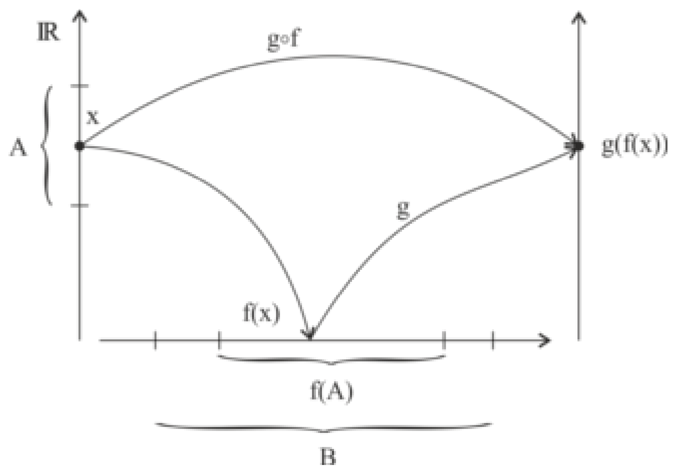
1η περίπτωση

Έστω $f: A \to \mathbf{R}, g: B \to \mathbf{R}$, με $f(A) \subseteq B$.

Τότε ορίζεται η $gof: A \to \mathbf{R}$, δηλαδή $x \to g(f(x))$

και ονομάζεται **σύνθεση** της f με τη g.

Σχηματικά βλέπουμε:



2η περίπτωση

Έστω $f: A \to \mathbf{R}$ και $g: B \to \mathbf{R}$

για τις οποίες **δεν ισχύει** $f(A) \subseteq B$, ισχύει όμως $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

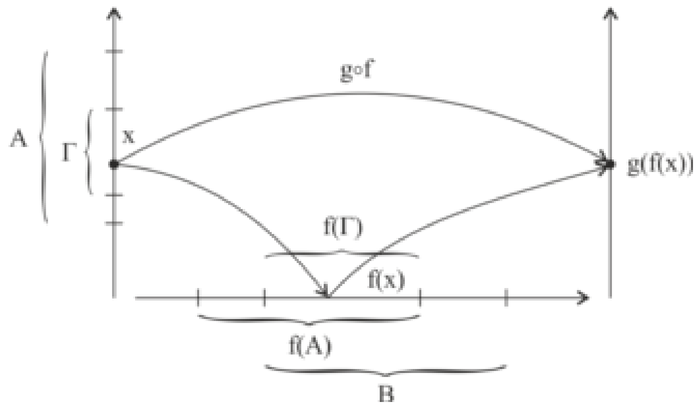
Σ' αυτήν την περίπτωση προσπαθούμε να βρούμε το υποσύνολο εκείνο του A, τα στοιχεία του οποίου έχουν τιμές $f(x)\in B$,δηλαδή το σύνολο $\Gamma=\{x\in A: f(x)\in B\}$.

Τότε ορίζουμε μία νέα συνάρτηση:

$gof:\Gamma\to\mathbf{R}$ με $x\to g(f(x))$, όπου $\Gamma=\{x\in A: f(x)\in B\}$

που ονομάζεται **σύνθεση** της f με τη g.

Σχηματικά παρατηρούμε:



Σημείωση: Με ανάλογη διαδικασία ορίζεται και η fog

Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$, τότε για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)\in\mathbf{R}$. Τότε η σύνθεση της τυχαίας συνάρτησης $f:A\to\mathbf{R}$ με την g ορίζεται και έχει για πεδίο ορισμού το A.

2. Ο προσδιορισμός του συνόλου Γ στις περιπτώσεις που το Β είναι διάστημα, ανάγεται σε επίλυση και συναλήθευση ανισοτήτων.

3. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ τυχαία συνάρτηση και $g(x)=x$.

   Τότε $fog=gof$, διότι:

   (α) οι gof, fog έχουν πεδία ορισμού το $\mathbf{R}$

   (β) για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει:

   $(fog)(x)=f(g(x))=f(x)$ και

   $(gof)(x)=g(f(x))=f(x)$

Γι' αυτό το λόγο η g συμβολίζεται με I και ονομάζεται ταυτοτική συνάρτηση.

4. Εν γένει ισχύει $fog \neq gof$. Δηλαδή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων. Ισχύει όμως η προσεταιριστική. Δηλαδή:

$$\left[(fog)oh\right](x)=\left[fo(goh)(x)\right]$$

5. Πρέπει να προσέξουμε ότι πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης και μετά τον τύπο. <u>Είναι λάθος</u> να βρούμε πρώτα τον τύπο της σύνθεσης και από τον τύπο να βρούμε το πεδίο ορισμού.

6. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις έχουν κλάδους πρέπει να συνθέσουμε τον κάθε κλάδο της μίας με κάθε κλάδο της άλλης.

Ημερομηνία τροποποίησης: 3/2/2012